1. Le misconcezioni degli allievi di scuola primaria relative al concetto di probabilità matematica Rapporto di ricerca

Gianfranco Arrigo[1]

This research is based on the results of about 2-3 hundred pupils of primary school who were questioned on simple probabilistic questions just before and immediately after a learning phase, and also one year later. Starting from the need of introduce in the compulsory school activities of education to probabilistic thinking, which is important for the formation of future citizens, it is assumed and showed that the concept of probability can already be learned in primary school, thus preventing the formation of wrong mental models which can at a later stage become serious obstacles to learning.

1. Introduzione

Correvano gli anni Settanta quando il tema della probabilità ha attirato l'attenzione dei molti insegnanti che aderivano con entusiasmo alla riforma «matematica moderna»[2]. Si ricorda particolarmente la settimana di studio della CIEAM, svoltasi a Bordeaux nell'estate del 1974, dedicata all'insegnamento della probabilità. I convegnisti erano ospitati nel campus dell'università, e dell'organizzazione locale facevano parte Nadine e Guy Brousseau, agli inizi della brillante carriera che tutti conosciamo. La signora Nadine, in particolare, accolse nella sua classe di scuola primaria un gruppo di partecipanti che ebbe la fortuna di assistere a una lezione sulla probabilità. Il gioco proposto agli allievi consisteva nell'«indovinare» il contenuto di una bottiglia nella quale vi era un numero noto di palline di due colori diversi. Non si conoscevano i numeri relativi alla distribuzione dei due colori. La bottiglia era foderata in modo che non se ne potesse vedere il contenuto, tranne nell'ultima parte del collo, nella quale, a bottiglia capovolta, poteva scendere una sola pallina. Eseguendo prove ripetute e osservando le frequenze di apparizione dei colori, i bimbi dovevano intuire il numero di palline dello stesso colore contenute nella bottiglia. Fatto questo, potevano aprire la bottiglia e verificare la correttezza della loro congettura. L'osservazione di questa lezione mostrò già allora che è possibile promuovere un'educazione al concetto di probabilità sin dalla scuola elementare. Sotto gli occhi di tutti era la dimestichezza con la quale i bimbi procedevano nella costruzione delle loro congetture e la naturalezza con la quale usavano termini del tipo «sicuro», «impossibile», «probabile». Dal punto di vista metodologico la lezione offriva un bell'esempio di apprendimento in situazione, argomento che successivamente, negli anni '80, Guy Brousseau sistemò teoricamente. Negli Atti di quella

1. Lavoro eseguito nell'ambito del NRD di Bologna.
2. L'impulso, molto forte, di questo movimento è stato dato in particolare dai congressi organizzati dall'OCDE, conosciuti come Colloqui internazionali di Parigi-Royaumont (1959) e di Zagabria-Dubrovnik (1960).

Rencontre si trova il fondamentale articolo dello stesso Brousseau (1974), nel quale l'autore riassume i risultati delle ricerche da lui condotte su questo tema.

Si può dire che la 26.a *Rencontre* della CIEAEM rappresentò, per i presenti, una forte stimolazione nella direzione dell'introduzione dell'educazione al pensiero probabilistico nella scuola elementare e media. Non solo, ma che questo apprendimento doveva avvenire attraverso un percorso didattico ricco di situazioni, diverse l'una dall'altra, proprio nella direzione più tardi indicata in particolare da Bruno D'Amore concernente la costruzione e lo sviluppo dei concetti matematici (D'Amore, 1999). È incredibile come, ripensando a quegli anni, si possano ritrovare, in germe, le grandi idee che sono state sistemate teoricamente nei decenni successivi.

In (Brousseau, 1974) l'autore sottolinea l'importanza dell'introduzione dell'insegnamento della probabilità già a partire dalla scuola primaria e presenta alcune riflessioni – sempre valide – sulle implicazioni didattiche di questo compito difficile e delicato. Brousseau, fra l'altro, scrive:

> «Un certa demistificazione, una certa comprensione e una certa pratica della statistica e della probabilità è diventata, per il cittadino, una delle condizioni per una società democratica e di conseguenza uno degli obiettivi dell'educazione».

Più in avanti si legge ancora:

> «Si può immaginare che l'uso cosciente dei modelli probabilistici sia ritardato dall'assenza di un linguaggio efficace sufficientemente familiare e dalla formazione esclusivamente determinista data dalla scuola. In questo caso è permesso sperare che un'azione pedagogica su alcuni punti nevralgici ben scelti permetterebbe uno sviluppo abbastanza rapido di nozioni già latenti nel bambino e pronte per essere esplicitate».

L'anno dopo, nell'estate del 1975, la Rencontre della CIEAM si tenne a Karlsruhe e in quell'occasione, fra i tanti personaggi presenti, si ricordano Hans Freudenthal, matematico tedesco naturalizzato olandese, che ha fornito contributi sostanziali anche alla storia e alla didattica della matematica (Freudenthal, 1968), Tamas Varga (1972, 1973) e Arthur Engel, dell'Università di Frankfurt am Main, molto noto per le sue ricerche sulle strategie del *problem solving* (Engel, 1973, 1999). Egli, in particolare, mostrò al pubblico come si possa rendere operativo un albero probabilistico, con l'aiuto di pedine che faceva correre lungo i rami, rispettando, a ogni diramazione, i rapporti di probabilità.

Sullo slancio di questi eventi, nell'anno scolastico 1976-77, in Ticino, si tenne un seminario, con sedute a scadenza quindicinale, dal titolo significativo «Seminario sul calcolo delle probabilità». L'iniziativa si prefiggeva soprattutto di sensibilizzare gli insegnanti su questo nuovo cantiere dell'insegnamento della matematica. Nella successiva realizzazione dei manuali scolastici per la scuola media ticinese[3], si cercò di integrare attività sulla probabilità con quelle più tradizionali. Nulla si è fatto finora nella scuola primaria.

Per capire meglio lo sviluppo dell'insegnamento del calcolo delle probabilità nella scuola, negli ultimi decenni, ci si può basare su ciò che è avvenuto in Fran-

3. Dal 1991 al 1994 furono pubblicati i manuali «Dimensione matematica I, II, III, IV» e dal 2004 al 2007 i successivi «Atolli matematici 1, 2, 3, 4» dall'editore Giampiero Casagrande, Lugano.

cia, sviluppo che ha poi influenzato, in misura diversa, la scuola di molti altri paesi, non solo europei.

Si fa riferimento agli articoli di due specialisti: Michel Henry (2000) membro dell'IREM dell'Università di Franche-Comté e Bernard Parzysz (2003), professore emerito dell'Università di Orléans, Laboratoire André Revuz (Université Paris-Diderot).

I due autori presentano e commentano i programmi ufficiali susseguitisi nel tempo. Di seguito, una sintesi desunta dai loro articoli.

1965 *Preliminari di analisi combinatoria – Principi del calcolo delle probabilità. Variabile aleatoria – Statistica applicata.*

Si tratta di un programma tipicamente tradizionale, la probabilità è definita come rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili, con il sottinteso, non sempre dichiarato, che i casi possibili sono equiprobabili, ciò che ha fatto storcere il naso a molti puristi; giova ricordare che anche Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) cadde in questa confusione.

1970 *Spazi probabilistici finiti (Ω, $P(\Omega)$, p). Applicazioni misurabili – Speranza matematica – Legge dei grandi numeri.*

Questo cambiamento radicale si allinea ai principi della riforma «matematica moderna» e pone come ragione principale il voler diminuire il più possibile il divario tra il sapere insegnato e quello accademico (*savoir enseigné* e *savoir savant*). L'approccio è di tipo assiomatico, il linguaggio usato in classe è decisamente formalizzato.

1982 *Combinatoria – Esempi di situazioni probabilistiche – Insieme finito dei risultati possibili – Calcolo delle probabilità con tecniche combinatorie – Numeri casuali – Statistica descrittiva.*

In questo periodo si assiste a un riflusso nei programmi scolastici di matematica. La statistica descrittiva viene proposta nelle prime classi del secondario superiore e il concetto di probabilità lo troviamo solo nelle classi terminali scientifiche. Nei testi programmatici fa capolino il termine «situazione», forse già nell'accezione proposta da Brousseau.

1986 *Combinatoria e probabilità – Statistica descrittiva.*

I documenti programmatici si staccano sempre più dal tradizionale elenco analitico di contenuti. L'obiettivo è di abituare gli allievi a descrivere, mediante il linguaggio elementare degli eventi, qualche esperienza casuale semplice e a usare le tecniche combinatorie per calcolare le probabilità. La statistica descrittiva è insegnata in tutte le classi del *collège*[4] con una funzione dichiaratamente sociale (*compréhension du fonctionnement de la société*), formativa e istituzionale (con l'accento sulla funzione interdisciplinare). Notiamo che nel testo del programma si parla di «abituare gli allievi» e di usare un «linguaggio elementare degli eventi». Tutto ciò sottintende un apprendimento in situazione che prevede anche fasi a-didattiche, nelle quali l'allievo costruisce e sviluppa le proprie immagini mentali.

1991 *Concetto frequentista di probabilità – Organizzazione, trattamento e rappresentazione di dati statistici grezzi – Uso delle funzioni statistiche di una calcolatrice programmabile (media e scarto tipo).*

L'uso della calcolatrice programmabile permette finalmente di poter affrontare in classe situazioni reali, nel caso specifico grandi collezioni di dati osservati e va-

4. Il *collège* è il termine usato in Francia per indicare la scuola secondaria di primo grado.

lori non «addomesticati». Inoltre la comodità tecnica offerta dalla calcolatrice permette all'allievo di risparmiare energie mentali che può spendere nella riflessione concettuale.

2000 Si aggiungono, solo per il settore liceale: *Statistica descrittiva e Statistica inferenziale.*

L'aspetto inferenziale – estrapolazione di parametri statistici dal campione alla popolazione – è svolto con metodo sperimentale, basato sulla simulazione di situazioni probabilistiche.

In Ticino lo stato attuale dell'insegnamento della probabilità si può così descrivere: i programmi della scuola elementare non prevedono nulla e in quelli della scuola media le attività combinatorie e probabilistiche sono previste come laboratorio matematico. Ritroviamo dunque l'idea di far lavorare gli allievi in situazione affinché possano costruire immagini mentali corrette. Purtroppo, però, non tutti gli insegnanti dedicano spazio sufficiente a queste attività e, per di più, dopo la scuola media, c'è un periodo di vuoto, corrispondente alle prime classi del liceo. L'idea di un insegnamento continuato del calcolo delle probabilità dalla prima alla quarta liceo non ha incontrato i favori degli insegnanti che hanno partecipato all'ultima riforma dei programmi.

Se ci riferiamo alla scuola primaria (in Svizzera, ma anche in altri paesi europei), il problema è ancor più arduo. Gli insegnanti, tranne qualche eccezione, non sono mai stati formati in questo campo e quindi, a giusta ragione, difficilmente accettano di proporre in classe attività di tipo probabilistico. Chi fra loro ha seguito qualche corso su questi argomenti non sempre ha il coraggio di proporre qualcosa in classe. In generale si considera la materia fuori dalla sfera euristica degli allievi. Qui sta il grande errore. In realtà i bambini sviluppano immagini mentali concernenti il concetto di probabilità già a partire dalla scuola dell'infanzia: scommettono, valutano i rischi prima di decidere, credono nella fortuna/sfortuna, stimano probabilità in modo soggettivo, ecc. Se tutto ciò non è accompagnato da un intervento educativo della scuola, può facilmente generare misconcezioni che col passare del tempo si radicano e diventano modelli parassiti, quindi tali da inibire nuovi apprendimenti. (D'Amore, 1999).

Diversi altri articoli hanno evidenziato l'importanza dell'introduzione precoce dell'insegnamento della probabilità nella scuola, accompagnata poi da una continuità curricolare. Ci si limita a segnalare l'intervento di Arrigo al Convegno di Castel San Pietro Terme, Incontri con la matematica N. 12 (Arrigo, 1998).

Già nella collana del primo[5] Progetto MA.S.E. si trova il volumetto di D'Amore (1986) dedicato alla probabilità e alla statistica: un'interessante raccolta di situazioni probabilistiche pensate per la scuola elementare. Nella prefazione l'Autore esprime già alcune idee di fondo che hanno sorretto anche la nostra ricerca. In particolare è significativo il seguente passaggio:

> «Le esperienze fatte ci mostrano che la "mentalità probabilistica" è insita nel modo di pensare comune, ma che va educata, aiutata a crescere per potersi affermare. Tante storture che l'adulto presenta non appena gli si chiede di ragionare su questioni combinatorie, su problemi di probabilità, o su aspetti statistici, sono appunto forse dovuti al fatto che la scuola si è sempre disinteressata di queste discipline».

5. All'interno del RSDDM di Bologna, sotto la direzione di Bruno D'Amore, Martha Isabel Fandiño Pinilla e Silvia Sbaragli, si sta lavorando al nuovo MA.S.E., una collana di testi sull'insegnamento della matematica nella scuola primaria che terrà conto anche dei risultati della presente ricerca.

Ma vi è di più: l'educazione al pensiero probabilistico, sfuggendo a necessità programmatiche molto precise (si pensi in particolare al raggiungimento di obiettivi rigorosamente definiti, come l'apprendimento delle tabelline in aritmetica o quello relativo alle formule per il calcolo di aree in geometria) si presta perfettamente a essere coniugato nei vari aspetti che, insieme, danno origine a un apprendimento completo (Fandiño Pinilla, 2008), risultando così squisitamente formativo del pensiero. Rinunciare a tutto ciò significa privare gli allievi di un'importante educazione.

Ora, non è una novità affermare che la scuola odierna, in generale, predilige l'apprendimento algoritmico e, in misura minore, quello concettuale. Basta fare il giro delle classi per rendersi conto di quello che gli insegnanti esigono prioritariamente dai propri allievi: acquisire automatismi, saper eseguire, conoscere schemi risolutivi di determinate classi di problemi, recitare definizioni ed enunciati di teoremi, ecc. Gli allievi stessi, magnifici interpreti del contratto scolastico, in gran parte non vogliono tanto sapere il «perché» delle cose, ma si interessano soprattutto di «come fare». Un apprendimento che nasce in questo contesto non può essere che superficiale e incompleto o ancora «non robusto» (Arrigo, 2007). Si sa che la capacità di eseguire un algoritmo, se non sostenuta da una comprensione concettuale, traballa facilmente non appena si presenta un ostacolo imprevisto e poi si dissolve in poco tempo. D'altra parte si sa pure che l'apprendimento concettuale non può certo essere ridotto a una semplice memorizzazione, per esempio mediante una formalizzazione precoce, ma va costruito con cura nel tempo e quindi non è immediatamente visibile, come certi programmi scolastici pretendono. Per l'apprendimento del concetto di probabilità matematica, o meglio per condurre gli allievi a raggiungere un primo livello di competenza, si ha a disposizione l'intero ciclo scolastico dell'obbligo. Si è fin qui accennato agli aspetti concettuale e algoritmico dell'apprendimento, ma sarebbe riduttivo fermarsi. La pratica di situazioni probabilistiche permette facilmente di considerare gli altri aspetti, non meno importanti, dell'apprendimento: lo strategico, il comunicativo e il semiotico.

L'aspetto strategico viene sviluppato negli allievi soprattutto mediante la pratica di veri problemi[6], in situazioni a-didattiche (D'Amore, 1999, 2003). Come si vedrà in seguito, l'insegnamento della probabilità nella scuola obbligatoria è proprio da svolgersi in questo modo.

L'aspetto comunicativo contribuisce al rafforzamento dell'apprendimento: argomentare a sostegno delle proprie convinzioni, così come capire, accettare o criticare le idee altrui sono comportamenti molto utili anche nell'apprendimento della matematica. Inoltre a questo aspetto è legata la possibilità degli insegnanti di mettere in luce due importanti elementi dell'apprendimento probabilistico: la rilevazione di eventuali misconcezioni di partenza o in corso di formazione e la valutazione delle capacità degli allievi di esprimersi in situazioni probabilistiche nelle quali è richiesto di prendere una decisione[7].

L'aspetto semiotico riguarda le rappresentazioni nei diversi registri semiotici con le relative operazioni di trattamento – all'interno di un registro – e di conversione da un registro all'altro (D'Amore, 2003).

6. Si ricorda in particolare la distinzione tra problema ed esercizio, ampiamente commentata nei testi citati.
7. Si vedano in particolare, più avanti, le situazioni degli item 2 e 3 del test di valutazione a distanza di un anno.

Già solo la rappresentazione della probabilità, nel semplice caso che i risultati possibili di una prova aleatoria siano equiprobabili e in numero finito, è un'ottima palestra per l'attivazione di queste operazioni. Per esempio, se si lancia un dado cubico ideale e ci si chiede qual è la probabilità di ottenere o 1 o 6, si può rispondere in diversi modi, usando registri diversi o rappresentazioni diverse all'interno dello stesso registro. Nel registro della lingua madre: «vi sono 2 possibilità su 6». Mediante conversione verso il registro frazionario: «la probabilità è 2/6», oppure mediante trattamento all'interno del registro frazionario «la probabilità è 1/3» o mediante conversione verso il registro decimale «la probabilità è $0,\overline{3}$», oppure ancora mediante conversione verso il registro percentuale «la probabilità è $33,\overline{3}\%$». Se pensiamo a studenti delle superiori, i registri sono altri e alcune conversioni diventano trattamenti all'interno di uno stesso registro. Per esempio i registri frazionario, decimale e percentuale possono essere fusi in un solo registro numerico da affiancare a quello insiemistico, a quello geometrico (probabilità come area) a quello della variabile aleatoria. Lo studente sceglierà l'uno o l'altro di questi registri a seconda della situazione che dovrà modellizzare, ma in ogni momento può essere costretto a operare conversioni o trattamenti.

Inutile sottolineare la ricchezza di questi cambi di rappresentazione, che, se ben curati e ripresi ogni volta che si fa un passo in avanti nell'apprendimento del concetto o nella risoluzione di un problema, contribuiscono ad affinare le relative immagini mentali.

2. Quadro teorico

Il primo testo importante volto non più all'arte di creare situazioni o semplicemente problemi relativi al concetto di probabilità, ma a riflettere sul «come» l'apprendimento avviene e da quali ostacoli può essere inibito, è senza dubbio quello di Piaget (1976) pubblicato anche in italiano con l'impegnativo titolo (tradotto alla lettera dall'originale francese) «La genesi dell'idea di fortuito nel bambino» e introdotto da Guido Petter. In esso lo psicologo svizzero presenta una numerosa raccolta di studi sperimentali compiuti in pieno stile personale su piccoli numeri di soggetti, rigorosamente suddivisi in tre stadi evolutivi: primo stadio dai 4 ai 7 anni, secondo dai 7 agli 11, terzo dopo gli 11-12 anni di età. La presente ricerca concerne esclusivamente la fascia dai 7 agli 11 anni, ma, non accettando per principio la rigida classificazione di Piaget, si terrà conto in parte anche di quello che egli attribuisce ai soggetti a partire dai 12 anni. Le prove usate da Piaget sono di 10 tipi e in ciascuno vengono presentati due insiemi (o collezioni) di gettoni che possono essere bianchi oppure recare una crocetta. La domanda posta ai soggetti è sempre questa: da quale collezione preferiresti pescare il gettone, se si vince solo pescando un gettone con la croce?

1) *Doppia impossibilità*: per esempio, una collezione di 2 gettoni e una di 3, tutti senza croce (0/2 e 0/3).
2) *Doppia certezza*: per esempio, una collezione di 2 gettoni e una di 4, tutti con la croce. (2/2 e 4/4)
3) *Certezza-impossibilità*: per esempio, una collezione di 2 gettoni crociati e una di 2 senza la croce. (2/2 e 0/2)
4) *Possibilità-certezza*: per esempio, una collezione 1/2 e una 2/2.
5) *Possibilità-impossibilità*: per esempio, una collezione 1/2 e una 0/2.

6) *Composizioni identiche*: per esempio, entrambe le collezioni 1/2.
7) *Proporzionalità*: per esempio, una collezione 1/3 e una 2/6.
8) *Ineguaglianza dei casi favorevoli e uguaglianza di quelli possibili*: per esempio, una collezione 1/4 e una 2/4.
9) *Ineguaglianze dei casi favorevoli e di quelli possibili, senza proporzionalità*: per esempio, 1/2 e 2/3.

In base ai risultati sperimentali, Piaget afferma che, mentre nel primo stadio (4-7 anni) «c'è un'assenza di confronto circa le relazioni quantitative in gioco», nello stadio successivo (7-11 anni) «il fanciullo confronta tra loro i casi favorevoli o sfavorevoli, ma non costruisce il rapporto tra i casi favorevoli e quelli possibili; si ipotizza un preesistente insuccesso per le questioni relative alla proporzionalità (…)».

Se però si esaminano più attentamente certi protocolli di ricerca riportati nel volume citato, si possono percepire nei soggetti l'esistenza di prime immagini mentali che vanno nella direzione della costruzione della proporzionalità.

Per esempio, di fronte alla scelta tra le collezioni 1/2 e 2/5, un soggetto reagisce così:

«Qui (2/5). – Perché? – Perché ce ne sono 2. – Allora? – No, qui (1/2) perché c'è una croce e uno senza croce e non ce ne sono più».

Piaget conclude che nei casi in cui siano uguali i numeri dei casi favorevoli oppure quelli dei casi possibili, i soggetti di 7-11 anni sanno rispondere correttamente; mentre i casi in cui questi numeri sono tutti diversi vengono capiti solo dopo i 12 anni di età.

Ma, leggendo attentamente i protocolli riportati da Piaget, si trova anche questo, relativo alla prova di tipo 7 (collezioni 1/3 e 2/6):

«(Posso pescare) in una (qualsiasi) delle due 1/3 o 2/6 perché è uguale: ogni volta per una croce ce ne sono due senza croce».

Si osserva come l'immagine mentale di proporzionalità stia formandosi e con essa anche quella di probabilità matematica.

Certo, siamo di fronte ad esempi semplici, con numeri facili da manipolare. Quando i numeri si fanno grandi, afferma Piaget, i soggetti di questo stadio evolutivo tendono a confrontare solo i casi favorevoli e a far coincidere maggiore probabilità con maggiori casi possibili.

Per quanto concerne le prove dei primi tre tipi, Piaget riconosce a questi allievi la capacità di capire i tre casi classici di evento sicuro, impossibile e possibile (o probabile, ossia con probabilità p tale che $0<p<1$).

In (Brousseau, 1974) l'autore propone un interessante confronto tra scommessa e predizione, due attività che costituiscono una potente motivazione alla riflessione probabilistica:

«Quando scommette, il bambino sceglie un'asserzione del tipo "tale evento si realizza", pur sapendo che in realtà potrebbe benissimo non realizzarsi. L'attitudine dello scommettitore esprime chiaramente che egli è cosciente di non disporre di alcun modello deterministico per poter prevedere la verità della sua asserzione. Il piacere della scommessa è proprio legato a questa incertezza. Al contrario, la predizione esprime una certa fiducia nel modello: il bambino formula, a proposito di ciò che accadrà, un'asserzione che crede fermamente che si realizzerà. La certezza si manifesta allora psicologicamente mediante una sorta di indifferenza nei confronti della realizzazione che non appare più come necessaria».

Efrahim Fischbein si occupa in modo particolare delle origini intuitive del pensiero probabilistico dei bambini (Fischbein, 1975). In un suo apprezzatissimo intervento al Convegno di Castel San Pietro Terme (1992) presenta risultati interessanti relativi a una ricerca che ha coinvolto 618 alunni di scuola elementare e di scuola media di Pisa ai quali è stato richiesto di risolvere alcuni problemi di probabilità. L'obiettivo principale è di ottenere una migliore comprensione dell'origine e della natura di alcuni ostacoli intuitivi in ambito probabilistico. Ecco alcuni risultati che ci tornano utili, tratti dall'articolo citato:

- «è stato identificato un fattore linguistico: sembra infatti che per molti ragazzi sia più difficile da capire il concetto di "evento certo" che quello di "evento possibile"; (…)
- nei problemi in cui intervengono numeri, le valutazioni di probabilità sono influenzate dalla grandezza dei numeri considerati: secondo i ragazzi, nei giochi aleatori, è più probabile ottenere numeri grandi che numeri piccoli;
- sembra che molti ragazzi siano incapaci di risolvere questioni di probabilità perché non riescono a considerare la struttura razionale di una situazione aleatoria: il caso è, per sé stesso, un fattore che "uguaglia" le probabilità (…)».

Daniel Kahneman, nato a Tel Aviv nel 1934, è noto per essere il secondo psicologo (il primo è stato Herbert Simon nel 1978) ad aver ottenuto il Premio Nobel in economia «per avere integrato risultati della ricerca psicologica nella scienza economica, specialmente in merito al giudizio umano e alla teoria delle decisioni in condizioni d'incertezza». Collaborò per anni con Amos Tversky, dimostrando che i processi decisionali umani violano sistematicamente alcuni principi di razionalità, mentre le teorie microeconomiche assumono che il comportamento degli agenti decisionali siano razionali e finalizzati a una massimizzazione dell'utile.

È interessante il libro redatto in collaborazione con due suoi colleghi (Kahneman, Slovic e Tversky, 1982), nel quale si tenta di descrivere comportamenti comuni dei soggetti relativamente a questioni probabilistiche. Ne indichiamo sinteticamente alcuni che possono rientrare nell'ottica del presente lavoro.

- Rappresentatività (cioè: la probabilità di un evento è valutata mediante estensione di esperienze personali anche in casi in cui queste non forniscono informazioni rilevanti).
- Casualità e attribuzione (cioè: frequentemente, nella valutazione di probabilità, il soggetto non si lascia influenzare né da elementi di conoscenza né da comportamenti osservati che possono tornare utili).
- Disponibilità (availability) (cioè: le probabilità di eventi facili da ricordare sono sovrastimate).

Ricco di spunti molto vicini ai vari aspetti della presente ricerca è senza dubbio l'articolo di Gagatsis, Anastasiadou e Bora-Senta (1997). In particolare vi si trova una sintesi delle ricerche sull'apprendimento del concetto di probabilità, dalla quale si riportano le più significative.

Stevenson e Weir (1959) mettono in risalto le difficoltà che insorgono nell'apprendimento delle probabilità.

Craig e Myers (1963) e più tardi Hawkins e Kapadia (1984) sostengono che allievi a partire dai 10 anni sono in grado di apprendere nozioni collegate alla probabilità.

Carfield e Ahlgen (1988), affermano che le difficoltà incontrate dagli studenti, quando essi trattano il concetto di probabilità, sono riconducibili alla intuitiva considerazione che gli studenti stessi hanno dei fenomeni probabilistici e statistici.

Pure interessante è l'articolo pubblicato sugli Atti del Convegno del Cairo (Bagni, Perelli D'Argenzio e Rigatti Luchini, 1999). In esso si pone l'accento sui primi approcci al concetto di probabilità degli studenti 16-17-enni. In particolare si rileva che questi soggetti, di fronte a semplici problemi di probabilità, tendono ad applicare intuitivamente la definizione laplaciana in ogni caso e, purtroppo, anche in assenza di equiprobabilità.

Si ritiene utile in questo contesto riportare la prima situazione proposta agli studenti. In una stanza vi sono tre tavoli. Su ciascuno vi sono due scatole chiuse, una bianca e l'altra nera, nelle quali si mettono caramelle di liquerizia e di menta.

Al giovane Pierino piacciono molto le caramelle di liquirizia, ma odia la menta.

Tavolo 1
Contenuto della scatola bianca: 50 caramelle di liquirizia e 60 caramelle di menta.
Contenuto della scatola nera: 30 caramelle di liquirizia e 40 caramelle di menta.
Domanda 1. Pierino vuole prendere a caso una caramella da una scatola. Pensi che sia meglio che la prenda dalla scatola bianca o da quella nera?
[Risultati ottenuti: scatola bianca (corretto) 73%, scatola nera 19%, non rispondono 8%].
La maggior parte degli allievi risponde bene perché la probabilità di estrarre una caramella di liquirizia dalla scatola bianca è 50/110=0,45 mentre dalla scatola nera è 30/70=0,43.

Tavolo 2
Contenuto della scatola bianca: 60 caramelle di liquirizia e 30 caramelle di menta.
Contenuto della scatola nera: 90 caramelle di liquirizia e 50 caramelle di menta.
Domanda 2. Pierino vuole prendere a caso una caramella da una scatola. Pensi che sia meglio che la prenda dalla scatola bianca o da quella nera?
[Risultati ottenuti: scatola bianca (corretto) 82%, scatola nera 10%, non rispondono 8%].
Una percentuale ancor più grande di allievi risponde bene perché la probabilità di estrarre una caramella di liquirizia dalla scatola bianca è 60/90=0,67 mentre dalla scatola nera è 90/140=0,64.
Questi allievi mostrano di saper applicare con sicurezza la definizione laplaciana di probabilità, non lasciandosi ingannare dai numeri grandi (fenomeno riscontrato già da Piaget riguardante soggetti più giovani e riproposto in seguito da Fischbein).

Tavolo 3
Ora il contenuto delle due scatole bianche dei tavoli 1 e 2 viene versato nella scatola bianca del tavolo 3 e il contenuto delle scatole nere dei tavoli 1 e 2 viene versato nella scatola nera del tavolo 3.

Domanda 3. Pierino vuole prendere a caso una caramella da una scatola. Pensi che sia meglio che la prenda dalla scatola bianca o da quella nera? [Risultati ottenuti: scatola bianca 63%, scatola nera (corretto) 23%, non rispondono 14%]

La maggior parte degli studenti cade su questa domanda. Nell'articolo citato si sostiene che la causa principale di questo insuccesso è di tipo affettivo: le scatole bianche sono risultate «vincenti» in entrambe le situazioni precedenti, dunque si tende a scegliere quella bianca anche nel tavolo 3. Si ritrova qui anche il fenomeno della rappresentatività di Kahneman e le affermazioni 1 e 9 proposte all'ICME 11 come si vedrà più avanti. Infatti gli studenti, che pure sono in grado di applicare la definizione di Laplace, di fronte a un'operazione «fisica», quella del mescolare i contenuti delle urne di stesso colore, abbandonano la logica fin qui applicata con successo, per seguirne un'altra che può avere anche radici nell'esperienza extra-scolastica, ma che purtroppo è errata. Cioè: essendo state identificate nelle scatole bianche quelle che danno maggiori probabilità di successo nei tavoli 1 e 2, sarà ancora la bianca quella che darà maggiori probabilità nel tavolo 3. Una sola occhiata alla situazione numerica avrebbe permesso di rispondere senza eseguire alcuna divisione:

- contenuto della scatola bianca: 110 caramelle di liquirizia, 90 di menta;
- contenuto della scatola nera: 120 caramelle di liquirizia, 90 di menta. La scatola nera dà maggiori probabilità di pescare una caramella di liquirizia.

Secondo Jean Claude Girard dell'IUFM di Lione (Commission Inter-IREM statistique et probabilités, 2001), la formazione di immagini mentali relative alla casualità è più delicata e richiede ancora più tempo di quanto ce ne voglia, per esempio, in geometria. Occorre quindi proporre molto presto agli allievi attività proprie alla creazione di queste immagini mentali. «Ricerche recenti hanno mostrato che gli allievi del *collège* possono utilizzare la simulazione per costruire esperienze equivalenti: alcuni esempi di fenomeni probabilistici possono essere proposti [già nel *collège*] nella prospettiva di fare apparire regolarità».

Il Congresso ICME 11, 2008, tenutosi a Monterrey (Messico) ha dedicato un'intera sezione all'insegnamento del calcolo delle probabilità.

Questi lavori di gruppo sono stati stimolati da un elenco di 10 affermazioni assai significative:

1. la gente comune[8] usa la propria esperienza per valutare la probabilità in modo molto casuale,
2. la gente comune tratta l'informazione in modo parecchio incompleto
3. la gente comune tratta l'informazione lasciandosi influenzare dagli eventi salienti,
4. la gente comune incontra grosse difficoltà nel valutare probabilità molto piccole o molto grandi,
5. la gente comune non assegna la probabilità 0 all'evento impossibile né la probabilità 1 a quello certo,
6. la gente comune associa certezza e impossibilità a eventi fisici piuttosto che a eventi logici,

8. Termine generico per indicare chi non ha seguito una corretta formazione probabilistica.

7. la gente comune assegna le probabilità 50%-50% ai due eventi legati al lancio di una qualsiasi moneta,
8. la gente comune assegna equiprobabilità a situazioni sconosciute,
9. la gente comune si dimostra incoerente quando assegna e valuta probabilità,
10. la gente comune si comporta in modo sovra-additivo.

Fra i lavori prodotti nel congresso si considera particolarmente interessante per la presente ricerca quello di Chiesi e Primi (2008). In esso si può leggere: «L'educazione probabilistica è legata all'euristica cognitiva. L'applicazione di metodi euristici conduce talvolta a risultati ragionevoli, ma la loro attivazione può anche produrre errori sistematici (Kahneman, Slovic, & Tversky 1982)».

Uno di questi errori è detto *gambler's fallacy* (errore del giocatore d'azzardo[9]). Per esempio, se si lancia 4 volte una moneta e si ottiene una sequenza di 4 «croci», il soggetto pensa comunemente che nel prossimo lancio il risultato «testa» abbia più probabilità di verificarsi. Il fatto che vi sia equiprobabilità tra i due risultati possibili non viene più considerato. È forte il sentimento che «testa» debba apparire per equilibrare la proporzione. In altre parole, tale soggetto cade in errore a causa della concezione (errata) che, in una successione di prove ripetute, la probabilità di un evento dipenda dai risultati verificatesi precedentemente.

3. Qualche riferimento storico-epistemologico

Gli antichi Greci conoscevano bene gli astragali, ossicini del tarso di piccoli animali. Probabilmente la conoscenza proveniva dall'Asia e si è diffusa in tutto il mondo dalla Russia alla Polinesia fino alle regioni polari, dove gli eschimesi giocano con ossicini di delfino.

L'astragalo ha 4 posizioni di equilibrio, dunque è un dado a 4 facce, ma, a differenza del dado cubico, le facce non hanno tutte le stesse probabilità di realizzarsi: nel modello ideale, due facce hanno probabilità 0,4 e le altre due probabilità 0,1.

Fra le varie combinazioni possibili, si ricorda il «colpo di Venere» consistente nell'ottenere 4 risultati diversi lanciando simultaneamente 4 astragali. Si hanno anche notizie sull'uso degli astragali da parte di stregoni, indovini, consiglieri di potenti i quali verosimilmente mantenevano segreta la distribuzione non uniforme delle probabilità, in modo da pilotare i risultati.

Una data fondamentale di inizio di una vera attività matematica attorno al concetto di probabilità può essere il 1654, anno in cui, grazie a una disputa tra giocatori d'azzardo, vengono coinvolti due matematici francesi: Blaise Pascal e Pierre de Fermat.

Si racconta che Antoine Gombaud, Cavaliere de Méré, un nobile francese con la passione per il gioco d'azzardo, abbia richiamato l'attenzione di Pascal su un gioco che propone di lanciare un paio di dadi 24 volte e relativo problema consistente nel trovare la probabilità che si verifichi almeno un «doppio 6».

9. Si è preferito adottare questa traduzione perché lo stesso effetto crea, nel gioco del lotto o anche della roulette, la fiducia nell'apparizione dei cosiddetti «numeri ritardatari».

Questo e altri problemi posti da de Méré portano Pascal e Fermat a uno scambio epistolare, nel quale i principi fondamentali della teoria della probabilità vengono formulati per la prima volta.

Lo scienziato olandese Christiaan Huygens, conosciuto soprattutto per i suoi studi sul pendolo, viene a conoscenza di questa corrispondenza e dopo pochi anni (1657) pubblica un piccolo testo, il primo libro che non sia mai stato stampato sulla probabilità, intitolato *De ratiociniis in ludo aleae* (Sui ragionamenti nel gioco dei dadi), nel quale, fra l'altro, introduce il concetto di speranza matematica.

Nello stesso periodo, Gerolamo Cardano scrive il suo *Liber de ludo aleae* (Libro sul gioco dei dadi), dapprima stampato in soli 200 esemplari («la mia copia è la n. 34» ebbe a dire) e tirato su carta a mano di puro straccio appositamente fabbricata in Germania, finemente rilegato con legatura rigida in carta marmorizzata. Da giocatore d'azzardo incallito, Cardano inizia ad applicare il calcolo matematico al gioco stesso, contribuendo così alla ricerca dei suoi colleghi transalpini. Il libretto di Cardano si fa conoscere al mondo intero solo sette anni dopo la sua morte, nel 1663, per i tipi di Ioannes Antonius Huguetan & Marcus Antonius Ravaud inserito nell'*Opera omnia*.

La teoria della probabilità si sviluppa rapidamente durante il XVIII secolo: dapprima con lo svizzero Jakob Bernoulli (1654-1705), che fonda la legge dei grandi numeri, e il francese Abraham De Moivre (1667-1754), al quale è legato il teorema limite centrale, poi, nel 1812, con la pubblicazione del libro *Théorie analytique des probabilités* di Pierre de Laplace, che introduce la distribuzione binomiale di probabilità e la sua approssimazione con la distribuzione normale. Laplace applica le idee probabilistiche a molti problemi scientifici e pratici. Anche Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) dà il suo contributo giungendo alla formulazione della distribuzione normale, conosciuta anche come «distribuzione di Gauss-Laplace», che costituisce uno dei cardini su cui si fonda la teoria statistica.

Basandosi sui lavori di parecchi matematici, fra i quali i russi Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894), che dimostra la disequazione sulla quale si basa la stima statistica della media, e Andrei Andreyevich Markov (1856-1922), noto soprattutto per lo studio di semplici processi stocastici che prendono il nome di «catene di Markov», il russo Andrey Nikolaevich Kolmogorov nel 1933 fonda la teoria assiomatica del calcolo delle probabilità. Da quel momento la probabilità diventa una branca fondamentale della matematica.

4. Il problema alla base della ricerca

Come si è messo in risalto nell'introduzione di questo rapporto, il calcolo delle probabilità e la statistica si insegnano quasi esclusivamente nelle scuole superiori, causando da una parte un evidente scompenso nella formazione del futuro cittadino e dall'altra conseguenze negative rilevanti sulla qualità dell'apprendimento. Non è una novità affermare che il cittadino di oggi si confronta sempre più spesso con questioni basate su dati statistici, sull'interpretazione che se ne fa – molte volte arbitraria –, su inferenze statistiche azzardate o volutamente falsate per giustificare l'ingiustificabile. Basta leggere un giornale o seguire un telegiornale per rendersi conto come, spesso, chi sa (una élite) approfitta dell'ignoranza della gente comune per raggiungere propri scopi, non sempre eticamente corretti.

Per esempio, nelle previsioni del tempo, ci vengono propinate una serie di affermazioni, mitigate, ogni tanto, dall'avverbio «probabilmente», ma non si fa mai accenno a stime di probabilità. Eppure basterebbe poco per dare un'idea della probabilità delle varie previsioni, magari in forma percentuale. Se si dice che domani sarà una giornata soleggiata al 95% è un conto, se lo sarà solo al 60% è un'informazione ben diversa. Il pubblico non è in grado di dare un senso alla probabilità? Certo: ma tacendo non gli si offre alcuna possibilità di farsi un'esperienza e quindi di costruirsi un senso della probabilità del realizzarsi di un dato evento. Siamo di fronte a un ciclo vizioso: non si comunica perché il destinatario non sarebbe in grado di capire, ma, non comunicando, si lascia quest'ultimo nell'ignoranza.

L'esempio delle previsioni meteorologiche è estendibile a gran parte dell'informazione che ci viene propinata dai media: a partire dagli indici di gradimento dei programmi televisivi, ai sondaggi di opinione su temi di attualità, alle proiezioni dei risultati delle votazioni politiche, alle ricerche di mercato, ai delicati test che si fanno sui medicinali, allo scottante problema dell'inquinamento e via dicendo.

Si sa che i moderni metodi statistici si basano sull'inferenza di determinati parametri campionari all'intera popolazione. L'estrapolazione, per esempio, della media del campione a quella della popolazione è un'operazione di una certa arbitrarietà, che comporta un margine di rischio, o, se si preferisce, una stima dell'attendibilità. Ora, rischio e attendibilità sono valori di probabilità, calcolabili grazie ai procedimenti di questa disciplina. Ma di questo non si fa cenno che raramente e si presentano al pubblico determinati risultati così ottenuti come se fossero deterministici.

Tutto ciò conduce a una prima conclusione: oggi, il cittadino che partecipa alla vita sociale e politica in uno stato democratico non può fare a meno di concetti basilari legati al calcolo delle probabilità. Ecco quindi che si impone una prima necessità: educare al concetto di probabilità i giovani della scuola obbligatoria.

Ma vi è anche una ragione pedagogica a favore di questa introduzione. Prendiamo come esempio l'aritmetica e la geometria, argomenti classici che da sempre vengono affrontati già a partire dalla scuola dell'infanzia. Ciò significa che gli allievi, nel percorso scolastico obbligatorio, accumulano un'importante esperienza su questi temi. Quando giunge il momento di perfezionare le immagini mentali fino a farle diventare modelli adeguati con un minimo di formalizzazione, ci si può basare su un terreno preparato. Questo non succede invece per la probabilità, se nella scuola primaria e nella secondaria di primo grado non si propongono attività di questo tipo. L'insegnante della scuola superiore, e spesso anche il docente universitario, si vedono costretti a costruire l'apparato formale senza potersi fondare su alcuna esperienza precedente. Risultato: gli studenti incontrano serie difficoltà nel dare senso ai concetti che devono apprendere. Ecco perché, di solito, il calcolo delle probabilità e la statistica creano seri problemi a chi li deve portare agli esami.

La scuola di base si trova quindi di fronte a un nuovo compito nell'insegnamento della matematica: è necessario dare agli allievi una congrua educazione al pensiero probabilistico.

Si può già iniziare nella scuola primaria? Se sì, in che modo? Come esposto in precedenza, esistono importanti studi ed esperienze che affermano non solo l'importanza ma anche la fattibilità di tale introduzione, ma l'istituzione scolastica sembra essere sorda nei confronti di questa problematica. La presente ricerca vorrebbe dare un nuovo contributo in questa direzione.

Siccome nell'ambito del NRD[10] di Bologna si è lavorato in modo approfondito sulle misconcezioni, si è scelto di lavorare, all'inizio, sul curricolo nascosto degli allievi della scuola primaria, in particolare sulla rilevazione di eventuali misconcezioni preesistenti, e poi sulla possibilità di correggerle mediante un'opportuna azione didattica.

5. Domande di ricerca

Ogni domanda è riferita ai bambini della scuola primaria, sia a quelli che non sono stati educati al concetto di probabilità, sia a quelli che hanno seguito una formazione della durata di uno-due anni.

D1. Di fronte a una semplice prova aleatoria con due risultati equiprobabili, ripetuta un numero 2n di volte, il bambino si aspetta che ogni risultato appaia n volte?

D2. In che misura il bambino crede nella fortuna? Oppure: in che misura il bambino pone maggior fiducia nel manifestarsi dell'evento a lui favorevole e gli assegna probabilità maggiore di quella oggettiva?

D3. In situazione di scommessa o di predizione, il bambino si lascia influenzare da aspetti affettivi o da esperienze vissute, in misura tale da modificare visibilmente i valori oggettivi di probabilità?

D4. In una successione di (n–1) prove aleatorie che hanno dato risultati conosciuti, il bambino si lascia influenzare da questi nello stimare la probabilità di realizzazione di un evento nell'n-esima prova?

D5. Il bambino è in grado di stimare correttamente la probabilità di un evento composto (per esempio nel caso di due estrazioni da un'urna senza rimessa)?

D6. Mediante un'opportuna azione didattica è possibile correggere le misconcezioni relative alle domande D1, D2, D3 e D4 e fare in modo che il bambino padroneggi semplici situazioni probabilistiche, compreso quelle del tipo indicato nella domanda D5? Se sì, in che modo l'insegnante può operare?

6. Ipotesi di ricerca

I1. Si stima che le misconcezioni relative alle prime quattro domande di ricerca siano presenti in larga misura nei bambini della scuola primaria che non sono stati minimamente educati al concetto di probabilità. Tali misconcezioni si possono ritrovare anche fra gli adulti, in modo molto esplicito: basti pensare al citato *gambler's fallacy* o alla cieca fiducia che il tifoso assegna all'evento «la squadra del cuore vince il derby».

I2. Si ipotizza che, in larga misura, il bambino non sia in grado di stimare correttamente la probabilità di un evento composto, anche dopo aver seguito una formazione in classe.

10. Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica del Dipartimento di matematica dell'Università di Bologna, diretto da Bruno D'Amore.

I3. Si pone molta fiducia in un'azione didattica mirata alla correzione delle misconcezioni considerate. Si ipotizza che, grazie a ciò, una percentuale significativa di bambini riesca a correggere le misconcezioni trasformandole in modelli mentali adeguati.

7. Descrizione della situazione e della metodologia di ricerca

Le insegnanti che hanno partecipato alla ricerca non avevano mai affrontato questo tema in classe e quasi tutte non avevano mai avuto l'occasione di avvicinarsi al calcolo delle probabilità.

All'inizio, nel 2006, è quindi stato necessario mettere in atto una fase di formazione strettamente dedicata a loro. Si sono sfruttate in parte le occasioni d'incontro – prima fra tutte il convegno di Castel San Pietro Terme –, in minor misura corsi teorici ad hoc e prevalentemente la trasmissione di materiali di apprendimento via Internet.

La seconda fase è consistita nel sottoporre singolarmente tutti gli allievi delle classi interessate (e che non avevano mai avuto alcun insegnamento scolastico sulla probabilità) a un test per determinare le loro concezioni e capacità di partenza, in relazione alle citate domande di ricerca. Hanno partecipato al test iniziale 381 allievi dalla classe terza alla quinta, sparsi un po' ovunque in Italia.

La terza fase, svoltasi durante l'arco di un anno scolastico (poi prolungato per permettere ad altre insegnanti di partecipare con le loro classi) è consistita in un'azione didattica, liberamente condotta dalle insegnanti, avente lo scopo di introdurre correttamente gli allievi nel mondo probabilistico, con particolare riguardo ai problemi e alle ipotesi di ricerca. La raccomandazioni date alle insegnanti sono state soprattutto di tipo metodologico: sviluppare un apprendimento in situazione, prevedendo ampi momenti di attività a-didattica, ponendo principalmente l'attenzione sullo sviluppo di immagini mentali adeguate e sulla correzione di misconcezioni. Solo una parte delle insegnanti ha potuto e saputo svolgere questa fase importante quanto delicata.

Dopo alcuni mesi dalla conclusione della fase di apprendimento, gli allievi, o meglio i 127 che hanno potuto usufruire di un insegnamento adeguato, sono stati sottoposti a un secondo test, per valutare le stesse cose del test iniziale, ma costruito in modo che l'allievo non si accorgesse di ciò (le situazioni sono isomorfe, ma hanno veste diversa; l'ordine dei problemi e delle relative domande è diverso).

Il confronto tra i due test avrebbe dovuto permettere di valutare l'opportunità di introdurre un insegnamento della probabilità già nella scuola elementare.

A distanza di un altro anno gli stessi allievi sono stati sottoposti a un ultimo test allo scopo di valutare due aspetti:

1. se l'apprendimento conseguito attorno al concetto di probabilità è duraturo;
2. come reagiscono gli allievi di fronte a domande aperte, per loro del tutto nuove.

8. Risultati di ricerca

Confronto tra i due test e commento[11]

	TEST INIZIALE		TEST FINALE		DELTA
NUMERO ALLIEVI TESTATI	381		127		
1. Le figurine 3. Palla campo					
circa la metà	66	**30.6%**	9	**7.1%**	
esattamente la metà	49	**10.8%**	6	**4.7%**	
non puoi dire nulla di sicuro	257	**58.6%**	112	**88.2%**	**29.6%**
2. Gioco dell'oca 5. Pari o dispari?					
conta la fortuna	162	**47.7%**	14	**11.0%**	
non ha ragione	97	**27.9%**	47	**37.0%**	**9.1%**
non so	122	**24.3%**	65	**51.2%**	
3. Lancio di una monetina 4. Che cosa pescherò?					
più probabile A	26	**3.6%**	3	**2.4%**	
più probabile B	26	**9.9%**	5	**3.9%**	
stessa probabilità	327	**86.5%**	119	**93.7%**	**7.2%**
4. Lancio di un dado 6. Pesca la carta					
ripetuto ha più probabilità di uscire	95	**27.0%**	21	**16.5%**	
ripetuto ha la stessa probabilità di uscire	162	**37.8%**	74	**58.3%**	**20.4%**
ripetuto ha meno probabilità di uscire	117	**34.2%**	32	**25.2%**	
5. Scommettiamo? 2. Bel tempo si spera					
scommessa contraria	44	**8.1%**	9	**7.1%**	
scommessa favorevole	139	**35.1%**	100	**78.7%**	**43.6%**
scommessa soggettiva	192	**55.9%**	18	**14.2%**	
6. Bianco o nero? 1. Righe o quadretti?					
AA	15	**8.1%**	1	**0.8%**	
BB	25	**3.6%**	2	**1.6%**	
AB o BA	138	**46.8%**	54	**42.5%**	**-4.3%**
nessuna è più probabile delle altre	202	**41.4%**	70	**55.1%**	

Ogni problema ha un titolo ed è preceduto da un ordinale che indica la posizione nel foglio dei dati. I problemi dei due test sono stati accoppiati secondo il criterio dell'isomorfismo. Il primo titolo è del problema del test iniziale, il secondo del test finale. La colonna intestata «DELTA» riporta la differenza tra la percentuale di riuscita del problema del secondo test e quella del primo. Se la differenza è positiva significa che si è avuto un progresso; sono interessanti le differenze con valori assoluti più grandi.

La maggiore differenza si è avuta nella coppia (5;2). I bambini che hanno cambiato opinione si sono liberati da influenze soggettive, anche affettive, e si sono comportati oggettivamente, scegliendo l'evento che ha maggiore probabilità di verificarsi. La percentuale di riuscita raggiunta nel secondo test, quasi l'80%, è molto buona e a questo risultato ha contribuito in modo determinante l'azione didattica.

11. I testi originali delle prove di valutazione sono riprodotti nell'Appendice.

Anche la coppia (1;3) ha dato un buon risultato. È notevole e soddisfacente il fatto che circa il 30% dei bambini cambino opinione sulla frequenza di apparizione in una sequenza limitata di prove di Bernoulli con distribuzione di probabilità 50%-50%, portando così la riuscita fino a quasi il 90%. Scegliere la risposta «non puoi dire nulla di sicuro su come saranno le figurine prese» è dimostrazione di possedere già una buona conoscenza della casualità.

Nella coppia (4;6) il miglioramento scende al 20%, e la riuscita si attesta a un 60% scarso. Qui si vede come in una sequenza limitata di prove di Bernoulli con distribuzione equiprobabile, la stima della probabilità dell'n-esima prova sia ancora significativamente condizionata dai risultati precedenti (*gambler's fallacy*).

La coppia (2;5) vuole valutare in quale misura giochi la soggettività nella stima della probabilità, in rapporto alla credenza nella fortuna/sfortuna. Qui le cose vanno male: la percentuale di riuscita è leggermente migliorata (dal 28% al 37%, ma quest'ultimo valore è decisamente insoddisfacente. L'esperienza extra-scolastica ha creato una misconcezione – credere nella fortuna/sfortuna – che risulta difficile da eliminare.

Nella coppia (3;4) il miglioramento appare lieve (7%), ma le percentuali di riuscita sono altissime (nel secondo test si attestano al 94%). Questo ci suggerisce che, nel caso di prove aleatorie come quelle di (2;5), ma non influenzate da un'esperienza precedente o da fattori affettivi, gli allievi non hanno dubbi e riconoscono l'equiprobabilità.

Significativo è pure il risultato della coppia (6;1): si sono ottenute percentuali di riuscita inferiori al 50% e addirittura un regresso, seppur minimo, dalla prova iniziale al secondo test. Se ne deduce che la determinazione della probabilità di eventi composti è fuori della portata degli allievi della scuola primaria e in ciò ci si allinea alle conclusioni di Piaget.

Risultati e commenti del test a distanza[12]

L'item nr. 1 propone due urne: A con 5 palline bianche e 3 nere, B con 8 palline bianche e 8 nere. Si vince se si estrae una pallina bianca. Da quale conviene pescare?

Item nr. 1	**frequenze assolute**	**percentuali**
NUMERO ALLIEVI TESTATI	127	
sceglie A e determina le probabilità	40	**31.5%**
sceglie A e stima le probabilità	53	**41.7%**
sceglie A senza giustificazione pertinente	19	**15.0%**
sceglie B perché vi sono più bianche	15	**11.8%**

Il risultato appare soddisfacente, se si osserva che ben l'88% sceglie l'urna più conveniente. La maggior parte si accontenta di stimare le probabilità in gioco, ma circa 1/3 le determina correttamente, frutto questo di un buon apprendimento. È notevole il fatto che non pochi allievi giungono persino a trasformare le frazioni in percentuali. Solo il 12% cade nella misconcezione già rilevata da Piaget secondo la quale maggiori casi favorevoli equivale a maggiore probabilità.

12. I testi originali sono riprodotti nell'Appendice.

L'item nr. 2 pone gli allievi di fronte alla decisione se prendere l'ombrello oppure no, sapendo che i meteorologi prevedono una probabilità di pioggia compresa tra il 30% e il 60%.

Item nr. 2	**frequenze assolute**	**percentuali**
NUMERO ALLIEVI TESTATI	125	
prendo l'ombrello, con interpretazone probabilistica	57	**45.6%**
prendo l'ombrello per sicurezza	37	**29.6%**
prendo l'ombrello senza giustificazione	8	**6.4%**
NON prendo l'ombrello, con interpretazone probabilistica	15	**12.0%**
NON prendo l'ombrello senza giustificazione	8	**6.4%**

Gli allievi si sono trovati di fronte a una situazione aperta: dal punto di vista oggettivo può avere ragione sia chi decide di prendere l'ombrello, sia chi decide di no. L'attenzione può allora essere posta sul come gli allievi sono giunti alla decisione. Si osserva che il 58% (45.6+12.0) degli allievi basa la propria risposta su risultati probabilistici correttamente ottenuti. Anche buona parte del 30% di soggetti che si è basata sulla semplice riflessione logica «che piova o no, è meglio avere l'ombrello» ha eseguito calcoli o stime di probabilità per poi aggrapparsi alla soluzione più sicura.

L'ultimo item, il nr. 3, ha proposto agli allievi una situazione del tutto nuova: tre urne A, B e C con i seguenti contenuti:

urna A, 3 palline bianche e 3 nere
urna B, 6 palline bianche e 4 nere
urna C, 4 palline bianche, 2 nere e 4 dal colore sconosciuto (bianco o nero).
Si vince se si estrae una pallina bianca. Da quale urna conviene scegliere?

Item nr. 3	**frequenze assolute**	**percentuali**
NUMERO ALLIEVI TESTATI	115	
scelgo la A	3	**2.6%**
scelgo la B perché ho più probabilità che nella A e più sicurezza rispetto alla C	58	**50.4%**
scelgo la B, con stima o determinazione delle probabilità	18	**15.7%**
scelgo la C, con stima o determinazione delle probabilità e accettazione del rischio	18	**15.7%**
scelgo la C, senza giustificazione	11	**9.6%**
posso scegliere C o B a seconda se voglio rischiare o no, con stima o determinazione delle probabilità	7	**6.1%**

Questa situazione è ancor più aperta della precedente per il fatto che il contenuto dell'urna C è indeterminato. L'urna A, assolutamente da non scegliere, è stata preferita da 3 allievi, una minoranza trascurabile. La maggior parte ha scelto la B sia perché è ovviamente preferibile alla A sia perché dà più sicurezza della C. Il 16% che ha scelto la C in conseguenza di un calcolo della probabilità massima di vincere pescando da questa urna e dichiarando di voler rischiare ha dimostrato di sapersi destreggiare ottimamente, così pure come il 6% che non ha deciso per l'una o l'altra delle urne B o

C, ma ha descritto oggettivamente la situazione delle diverse probabilità in gioco. Senza una congrua azione didattica, difficilmente questi risultati si sarebbero ottenuti.

9. Risposte alle domande di ricerca

R1. Circa il 40% dei bambini privi di un'educazione alla probabilità crede che, su 2n prove di Bernoulli equiprobabili, ciascuno dei due risultati possibili debba per forza apparire n volte (con piccoli margini di «errore»). Dopo l'azione didattica questa percentuale si riduce al 12%.

R2. Solo circa 1/3 dei bambini non crede nella fortuna/sfortuna o non si lascia influenzare da aspetti soggettivi. L'azione didattica ha migliorato di poco questa percentuale, ma si nota un significativo passaggio dal credere nella fortuna/sfortuna alla perplessità (nel secondo test la risposta «non so» è scelta da una metà abbondante di allievi).

R3. Con una certa sorpresa si può osservare – vedere le coppie di problemi (3;4) e (5;2) come siano stati pochi i bambini che, anche inizialmente, non si sono lasciati influenzare né dall'esperienza vissuta né (in misura maggiore) da fattori affettivi nell'assegnare la probabilità ai risultati possibili di una semplice prova aleatoria.

R4. Nel test iniziale il 40% circa di allievi non cade nella misconcezione *gambler's fallacy*, secondo la quale, in una sequenza di prove di Bernoulli equiprobabili, si pone più fiducia nell'apparizione dei cosiddetti «risultati ritardatari». L'azione didattica ha avuto buon esito perché ha portato questa percentuale al 60%.

R5. Meno della metà dei bambini riesce a stimare correttamente la probabilità di un evento composto, ma quel che più conta, dopo l'azione didattica la situazione è addirittura peggiorata. Si può ipotizzare che almeno parte delle risposte corrette siano dovute al caso.

R6. Globalmente l'azione didattica si è rivelata molto incisiva. Particolarmente significativi sono i risultati del test a distanza che mostra come l'apprendimento si sia conservato anche dopo circa un anno dall'azione didattica condotta nelle classi. Circa i 3/4 dei bambini di fronte a una situazione probabilistica della quale si conoscono tutti i dati necessari assumono un atteggiamento oggettivo e stimano o determinano esattamente le probabilità in gioco (item nr. 1). Ma il risultato più eclatante è stato raggiunto negli item 2 e 3, che presentano situazioni aperte, nelle quali occorre non solo saper calcolare le probabilità, ma anche essere in grado di valutare fattori di rischio. Ebbene, nell'item 2 i soggetti che hanno avuto un comportamento corretto sono il 64% e nel 3 questa percentuale sale addirittura all'88%.

10. Conclusioni

I risultati di questa ricerca ci suggeriscono alcune importanti conclusioni relative all'introduzione dell'educazione al pensiero probabilistico già nella scuola primaria. La cosa non è solo possibile e opportuna – come lo dimostra l'esperienza fatta con le classi –, ma addirittura necessaria. Da tempo si va dicendo che, nella scuola secondaria, è ora che si abbandoni il tradizionale asse aritmetica-geometria, struttura portante degli attuali programmi, e lo si sostituisca con lo schema triangolare aritmetica-geometria-probabilità (Arrigo, 1999). È però giunto il momento per fare altrettanto anche nelle classi del secondo ciclo della scuola primaria. Il nuovo apprendimento non deve però essere inteso come raggiungimento di obiettivi specifici di tipo concettuale o algoritmico, ma come acquisizione di un modo di pensare diverso da quello deterministico. In questo senso, occorre far compiere agli allievi una certa esperienza nell'agire in ambito probabilistico. È fondamentale che gli allievi acquisiscano il senso della probabilità matematica, ripulito dalle eventuali misconcezioni formatesi nell'esperienza di vita extra-scolastica, che giungano insomma a quella competenza – se ci si consente di usare un termine così impegnativo – che hanno mostrato di possedere gran parte degli allievi che abbiamo sottoposto al test a distanza di un anno dal periodo di apprendimento. Per poter realizzare questo cambiamento, occorre che gli insegnanti siano adeguatamente preparati. Non è necessario che diventino profondi conoscitori del calcolo delle probabilità, ma che siano in chiaro sul concetto e che acquisiscano una certa esperienza nel creare situazioni probabilistiche corrette e idonee allo sviluppo mentale dei loro allievi. Col tempo e grazie alla pratica in classe devono poi diventare abili e attenti nella rilevazione di misconcezioni e quindi essere pronti ad agire allo scopo di trasformarle in immagini mentali corrette. Ci sono riuscite in modo soddisfacente le insegnanti che hanno partecipato alla, accettando dapprima di intraprendere un minimo di formazione teorica e poi impegnandosi con le proprie classi al fine di formare adeguatamente i propri allievi. Ciò dimostra almeno che – da parte degli insegnanti – l'introduzione dell'educazione al pensiero probabilistico non è affatto impossibile. Se poi si considera il lato allievo, allora qualsiasi dubbio che si possa avere scompare, perché da un lato si è mostrato l'importanza di poter intervenire presto sulle misconcezioni, dall'altro si sono ottenuti risultati più che soddisfacenti e, ciò che non è secondario, si sono visti allievi impegnarsi con grande piacere.

Nell'introduzione di questo rapporto si è attirata l'attenzione sull'importanza di un'educazione probabilistica generalizzata, rispondente ai bisogni di una società come quella odierna e veramente democratica. Questo è un compito che la scuola obbligatoria deve assumersi. La presente ricerca si unisce a quelle che sostengono la fattibilità e l'importanza di iniziare già nella scuola primaria.

Ringraziamenti

I dati sperimentali sui quali si è basata la presente ricerca sono stati prodotti da un gruppo di insegnanti che hanno partecipato in misura diversa, secondo la loro disponibilità. In particolare hanno dato un contributo indispensabile e di ottima qualità Lucia Baldazzi, Elisabetta Bertazzi, Luisita Colucci, Erika D'Ambrosio, Erminia Dal Corso, Barbara Dalla Noce, Margherita Francini, Giuseppe Grasso, Andrea Guidotti, Giuliana Liverani, Ketty Marabini, Lorella Maurizi, Tiziana Minazzi, Annarita Monaco e Vita Ramone.

A tutte e a tutti va un grande e sentito ringraziamento.

Si ringrazia in modo particolare Bruno D'Amore per i preziosi consigli e Giorgio Mainini per la lettura della bozza.

Bibliografia

Anastasiadou S. e Chadjipantelis T. (2008). The role of representations in the understanding of probabilities in tertiary education. *Atti del congresso ICME 11, 2008*.
Arrigo G. (1998). L'educazione al pensiero combinatorio e probabilistico. *Atti del Convegno Incontri con la matematica, 12*. Bologna: Pitagora. 3-8.
Arrigo G. (1999). Educazione al pensiero probabilistico: scuola media e primo biennio superiore. *Bollettino dei docenti di matematica, 38*. Bellinzona: UIM. 43-60.
Arrigo G. (2007). Robustezza degli apprendimenti. Un contributo alla valutazione della competenza. *La matematica e la sua didattica*, 4. Bologna: Pitagora. 471-479.
Bagni G.T., Perelli D'Argenzio M. P. e Rigatti Luchini S. (1999). A paradox of Probability: an experimental educational research in Italian High School. *Proceedings of the International Conference on Mathematics Education into the 21st century.* Cairo (Egitto): A. Rogerson Ed. III, 57-61
Brousseau G. e Briand J. (1974). Généralités sur l'enseignement des probabilités au niveau élémentaire. *Actes de la 26e rencontre de la CIEAEM*. Bordeaux: IREM de Bordeaux. 66-80
Carfield J. e Ahlgeen A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implication for research. *Journal of Research in Mathematics Education* 19. 44-63.
Chiesi F. e Primi C. (2008). Primary School Children's and College Students' Recency Effects in a Gaming Situation. *Proceeding of ICME 11, Monterrey (Messico)*.
Commission Inter-IREM statistique et probabilités. (2001). *Autour de la modélisation en probabilités*. Besançon: PUFC.
Craig G.J. e Myers J.L. (1963). A Developmental Study of Sequential Two Choice Decision Making. *Child Development* 34. 483-490.
D'Amore B. (1986). *Probabilità e statistica. Progetto MA.S.E., vol. III*. Milano: Franco Angeli.
D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
D'Amore B. (2003). *Problemi di matematica nella scuola primaria*. Bologna: Pitagora.
D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. 50-61.
Engel A. (1973). *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Bd I & II*. Stuttgart: Klett.
Engel A. (1999). *Problem-solving strategies*. New York: Springer.
Engel A., Varga T. e Walser W. (1972). *Jeux de combinatoire, de probabilités et de statistiques*. Paris: OCDL.
Fandiño Pinilla M.I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson
Fischbein E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht (Olanda): D. Reidel Publishing Company.
Fischbein E. (1992). Fattori che influenzano le valutazioni di probabilità nei bambini e negli adolescenti. *Atti del Convegno di Castel San Pietro Terme*. Bologna: Pitagora.
Freudenthal H. (1977). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Band I & II, 2. durchgesehene Auflage. Stuttgart: Klett.
Gagatsis A., Anastasiadoy S. e Bora-Senta E. (1997). Errori commessi da studenti greci di Matematica in questioni di probabilità. *Bollettino dei docenti di matematica, 35*. Bellinzona: UIM. 87-102.
Hawkins e Kapadia. (1984). Children's conceptions of probability, a psychological and pedagogical review. *Educational studies in Mathematics*. 349-377.
Henry M. (2000). Perspectives de l'enseignement de la statistique et des probabilités. *Gazette des Mathématiciens*, 84. Paris: SMF Publications.
Kahneman D. Slovic P. e Tversky A. (1982) *Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases*. New York e Cambridge: Cambridge University Press.
Parzysz B. (2003). L'enseignement de la Statistique et des probabilités en France: évolution au cours d'une carrière d'enseignant (période 1965-2002), in *Probabilités au lycée*, (pp. 9-34). Paris: Brochure APMEP 143.
Piaget J. (1976). *La genesi dell'idea di fortuito nel bambino*. Introduzione di Guido Petter. Roma: Newton Compton. 93-148.
Stevenson e Weir. (1959). Variables Affecting Children's Performance in a Probability Learning Task. *Journal of Experimental Psychology* 5T. 403-412.
Varga T. (1973). *Giochiamo alla matematica!* Firenze: Organizzazioni speciali.

Appendice

Test iniziale

1. **Le figurine**

Paolo ha delle figurine dei Pokemon in una scatola. Metà di queste figurine sono uguali alle tue e metà, invece, sono diverse. Paolo ti regala delle figurine, ma le devi prendere dalla sua scatola ad occhi chiusi.

Secondo te capita sicuramente che:

- circa la metà delle figurine che hai preso sia diversa dalle tue e quindi aumenti così la tua collezione
- esattamente la metà delle figurine sia diversa
- non puoi dire nulla di sicuro su come saranno le figurine prese.

2. **Gioco dell'oca**

Luca si ritiene un giocatore fortunato. Dice che quando tira lui il dado, il 6 (che è il risultato migliore) esce più spesso.

Che cosa ne pensi?

- che ha ragione: il risultato può dipendere dalla fortuna di chi tira il dado
- che non è vero
- non so

3. **Lancio di una monetina**

Se lanci una moneta:

- è più probabile che esca Testa
- è più probabile che esca Croce
- può uscire Testa oppure Croce con la stessa probabilità.

4. **Lancio di un dado**

Sara lancia un dado ed esce 5. Lo lancia un'altra volta ed esce ancora 5.
Se lo lancia ancora, che cosa ti aspetti?

- che il 5 ha più probabilità di uscire
- che il 5 ha sempre la stessa probabilità di uscire
- che il 5 ha meno probabilità di uscire.

5. **Scommettiamo?**

Ci stai a scommettere con un tuo amico che la tua squadra del cuore vinca la prossima partita:

- anche se hai poca probabilità di vincere
- solo se hai molta probabilità di vincere
- scommetti sempre sulla vittoria della tua squadra

6. **Bianco o nero?**

In un sacchetto ci sono due palline nere e due palline bianche. Senza guardare peschi due palline.

Secondo te, è più probabile che:
- escano due palline nere
- escano due palline bianche
- esca una pallina bianca e una nera
- nessuno di questi risultati ha più probabilità dell'altro

Test finale

1. **Righe o quadretti?**

È il primo giorno di scuola e hai nella cartella i quaderni nuovi, due a righe e due a quadretti. Frughi nella cartella e senza guardare ne prendi due a caso.

È più probabile che ti trovi in mano:
- due quaderni a righe
- un quaderno a righe e uno a quadretti
- due quaderni a quadretti
- nessuna di queste possibilità è più probabile dell'altra.

2. **Bel tempo si spera**

Scommetti con un tuo compagno che il giorno della gita scolastica non pioverà solo se:
- la televisione ha previsto che ci sarà bel tempo
- la televisione ha previsto pioggia
- scommetti in ogni caso perché quando vai in gita è sempre bel tempo.

3. **Palla campo**

Fai parte di un gruppo di bambini che vogliono organizzare una partita di palla campo. Il gruppo è formato da 20 bambini, metà molto bravi a giocare e metà un po' meno bravi. Per formare le due squadre di 10 bambini ciascuna si estraggono i nomi a sorte.

Secondo te capita certamente che:
- esattamente 5 bambini di ogni squadra sono bravi a giocare
- ci saranno circa 5 bambini bravi a giocare
- non puoi dire nulla di sicuro su come saranno suddivisi i bambini bravi a giocare nelle due squadre.

4. **Che cosa pescherò?**

In un sacchetto ci sono una pallina rossa e una blu.

Se peschi una pallina senza guardare:
- può uscire la pallina rossa oppure quella blu con la stessa probabilità.
- è più probabile che esca la pallina rossa
- è più probabile che esca la pallina blu.

5. **Pari o dispari?**

Marco quando scommette a pari e dispari sceglie sempre pari perché secondo lui esce più spesso.

Che cosa ne dici?

- non so
- Marco non ha ragione
- Marco ha ragione perché lui è fortunato

6. Pesca la carta

In un mazzo di carte ci sono quattro assi, uno di cuori, uno di fiori, uno di quadri e uno di picche. Chiara sceglie a caso una carta e pesca l'asso di cuori.

Rimette questa carta nel mazzo e rimescola.

Sceglie di nuovo una carta ed esce ancora l'asso di cuori.

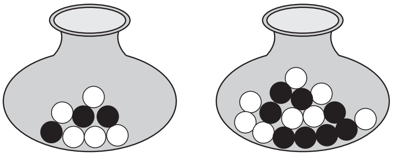
La rimette nel mazzo e mescola le carte.

Se sceglie di nuovo una carta, che cosa ti aspetti?

- che l'asso di cuori ha sempre la stessa probabilità di uscire
- che l'asso di cuori ha più probabilità di uscire
- che l'asso di cuori ha meno probabilità di uscire.

Test a distanza di un anno

1. Quale urna?



urna A urna B

Peschi a occhi chiusi da un'urna a tua scelta. Se la pallina è bianca vinci.

Da quale urna ti conviene pescare? Perché?

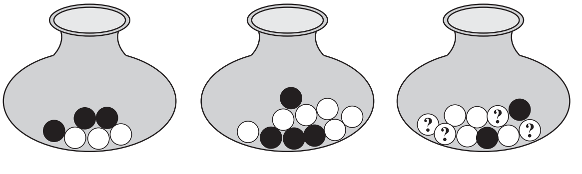
2. Pioverà o non pioverà?

Domani andrai con i tuoi compagni a fare una passeggiata nel bosco.

Secondo le previsioni meteorologiche, la probabilità che domani piova varia tra il 30% e il 60%.

Ti conviene portare l'ombrello? Perché?

3. Da quale urna peschi?



urna A urna B urna C

Peschi a occhi chiusi da un'urna a tua scelta. Se la pallina è bianca vinci. Da quale urna ti conviene pescare? Perché?